

Politecnico di Milano - Bovisa
via La Masa 34, 20156 Milano

Dottorato di Ricerca
Corso di “dinamica di sistemi multicorpo”

Dinamica di sistemi deformabili

Pierangelo Masarati

18 dicembre 2008

1 Dinamica di Sistemi Deformabili

Inizialmente l'approccio multicorpo all'analisi della dinamica di sistemi meccanici è stato applicato a insiemi di corpi rigidi soggetti a vincoli cinematici olonomi e anolonomi. L'esigenza di descrivere in modo consistente ed efficace la flessibilità di sistemi relativamente complessi è stata però subito sentita in quanto dall'analisi di meccanismi l'attenzione si è presto spostata a problemi diversi, in cui l'occorrenza di grandi spostamenti e rotazioni a velocità elevate, tali da suscitare notevoli forze di natura inerziale, si sposa alla intrinseca necessità di considerare la flessibilità della struttura. Si pensi ad esempio ai motori degli elicotteri, la cui dinamica è dominata da fenomeni vibratorii, causati dalla periodicità del moto, che vanno ad eccitare la flessibilità delle pale, della catena di comando e della struttura, con effetti di retroazione sulle forze aerodinamiche (aeroelasticità). In questi sistemi la deformabilità strutturale è fondamentale perché sta alla base dell'irrigidimento flessionale della pala dovuto al precarico assiale di natura inerziale (centrifugo). A tutto questo si unisce anche la necessità di considerare da vicino le interazioni della dinamica e della deformabilità della struttura con la dinamica degli impianti (ad esempio l'impianto idraulico che dà potenza agli attuatori, o il sistema di controllo automatico del volo), che determina forze dipendenti dalla configurazione del sistema, formalmente analoghe a forze elastiche. Questi problemi di frontiera trovano corrispondenza in problemi meccanici nei quali l'interazione tra dinamiche diverse, con un contributo significativo della flessibilità, non è più trascurabile.

In questo senso la descrizione della deformabilità strutturale nell'analisi multicorpo è passata dai tempi pionieristici in cui elementi flessibili quali le travi erano modellati come forze "a scatola nera" dipendenti dai gradi di libertà di due corpi, ad un approccio riconducibile agli elementi finiti non-lineari [1, 2, 3].

1.1 Problema Tipico

Si consideri un problema del tipo:

$$M(\mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \quad (1)$$

dove \mathbf{u} sia una incognita dipendente dal tempo t che esprime la configurazione, ovvero l'insieme di posizione e orientazione, di un generico punto del sistema materiale che viene analizzato.

Si tratta di un problema differenziale non lineare che risulta dalla scrittura della dinamica di un sistema meccanico generico, indipendentemente dal principio fisico utilizzato (scrittura diretta dell'equilibrio, bilancio di energia, principio dei lavori virtuali, principio di Hamilton).

Nella maggior parte delle applicazioni (se si eccettuano problemi specialistici quali il crash), il principio ispiratore della modellazione della flessibilità strutturale nei sistemi multicorpo si basa sull'assunto che i sistemi meccanici in genere lavorano in condizioni di deformazione elastica, quindi sono soggetti a deformazioni piccole, se non infinitesime, dal punto di vista del legame costitutivo. Tuttavia il sistema, nel suo complesso, può essere soggetto a grandi spostamenti e rotazioni. La descrizione della deformabilità in modo corretto richiede la capacità di definire ed utilizzare deformazioni in grado di esprimere

correttamente il fatto che ad un movimento rigido di ampiezza finita ed arbitraria deve corrispondere energia di deformazione nulla.

1.2 Riferimento Relativo o Assoluto?

Un punto fondamentale della filosofia multicorpo è che grandezze diverse possono essere descritte nel sistema di riferimento che ne rende più agevole la definizione. In questo senso le equazioni della dinamica sono tipicamente descritte nel sistema di riferimento inerziale perché in questo modo non compaiono i termini di trascinamento e di *Coriolis* nelle forze di natura inerziale. Le forze di natura elastica sono più convenientemente espresse in un opportuno sistema di riferimento solidale con il materiale; tuttavia la loro trasformazione nel sistema inerziale coinvolge una semplice relazione cinematica che non deve essere derivata, con la notevole eccezione dello smorzamento strutturale, che nel modello residualizzato in forma viscosa a rigore richiede la velocità di deformazione; si tratta comunque di un ordine di derivazione in meno rispetto alle accelerazioni.

Si consideri ad esempio un punto, la cui posizione $\tilde{\mathbf{x}}$ sia definita in un sistema mobile di orientazione \mathbf{R} , soggetto a rotazione pura, per cui la posizione del punto nel sistema inerziale è

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}} \quad (2)$$

La velocità assoluta è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{x}} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (3)$$

(dove si è fatto uso di $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$) mentre l'accelerazione assoluta è

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (4)$$

e, come se non bastasse, la sua perturbazione, necessaria per la linearizzazione del problema, è data da

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{a} &= \delta\ddot{\mathbf{x}} \\ &= \delta\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times) \delta\mathbf{x} \\ &\quad + 2\delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \delta\mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\delta\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \delta\mathbf{R}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R}\delta\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (5)$$

Siccome le forze di inerzia nel sistema assoluto sono definite come $\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{a}$, è evidente che conviene descrivere il movimento del corpo direttamente con le coordinate assolute, per le quali $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$. Se invece vi fossero forze elastiche, tipicamente dipendenti dalla configurazione relativa, la loro espressione, $\tilde{\mathbf{f}}_{el} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$, agevole da definire nel sistema relativo, richiede:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T \mathbf{x} \quad (6)$$

che è una espressione più semplice da maneggiare rispetto all'espressione dell'accelerazione. La forza elastica nel riferimento inerziale diventa quindi:

$$\mathbf{f}_{el} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{R}^T \mathbf{x}) \quad (7)$$

Questo approccio può essere svantaggioso nel caso in cui sia necessario considerare formulazioni intrinseche della deformazione (come verrà illustrato in seguito).

2 Continuo Deformabile

Si consideri un continuo deformabile. Il problema dell'equilibrio di un continuo è dato dall'equazione di equilibrio indefinito (forze)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (8)$$

l'equazione dei momenti in genere non viene scritta esplicitamente in quanto, fatta eccezione per i materiali polari, i continui non possono contrastare momenti per unità di volume e, di conseguenza, tale equazione degenera in un vincolo algebrico di simmetria per il tensore degli sforzi.

La soluzione di questo problema consiste nel determinare la configurazione del sistema, \mathbf{u} , le cui deformazioni, $\mathbf{D}(\mathbf{u})$, attraverso un opportuno legame costitutivo, danno luogo a sforzi $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}(\mathbf{u}))$ tali da soddisfare l'equilibrio e le condizioni al contorno sia in termini di posizione che di carico.

A questo risultato raramente si può giungere in forma chiusa; normalmente si usano metodi basati sulla discretizzazione del dominio e sulla scelta di soluzioni elementari, la cui combinazione dà luogo ad una approssimazione della soluzione. Questi metodi possono essere riassunti sotto il nome generale di metodi agli Elementi Finiti (FEM).

2.1 FEM Non-Lineare

Le deformazioni sono intrinsecamente non-lineari. Il concetto di deformazione, in termini puramente cinematici, è legato alla distorsione della rappresentazione di un punto che si ha tra due diverse configurazioni (ad esempio in due istanti diversi, o per diversi livelli di sollecitazione). Esistono diverse definizioni di deformazione (e di sforzo coniugato) che consentono di descrivere in modo opportuno lo stato di deformazione (ovvero l'energia di deformazione) accumulata in un continuo deformato in una data configurazione. Tra queste, le più significative sono (da Bathe [4]):

Formulazione		Sforzi e deformazioni
Lagrangiana totale	TL	tensore secondo di Piola-Kirchhoff tensore di Green-Lagrange
Lagrangiana aggiornata	UL	tensore di Cauchy tensore di Almansi
Lagrangiana aggiornata secondo Jaumann	ULJ	rateo di sforzo di Jaumann velocità di deformazione

Tipi di analisi:

1. sforzi e deformazioni infinitesime; legame costitutivo lineare o non-lineare (TL);
2. grandi spostamenti e rotazioni, ma piccole deformazioni; legame costitutivo lineare o non-lineare (TL, UL);
3. grandi spostamenti, rotazioni e deformazioni (TL, ULJ).

Si noti come l'approccio TL sia sempre valido, mentre gli altri siano adatti ad analisi specialistiche. Questo significa che l'approccio TL, pur generale, in casi speciali può risultare poco conveniente, mentre approcci specialistici possono consentire maggiore efficienza, accuratezza e semplicità di formulazione.

2.1.1 Deformazioni

La deformazione si ottiene a partire dalla misura della distorsione a cui è soggetto un continuo al variare della sua configurazione. La distanza tra le due diverse posizioni di uno stesso punto in due diverse configurazioni si può esprimere come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad (9)$$

Il suo gradiente rispetto alla configurazione indeformata è

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} = \nabla_0 \mathbf{u} \quad (10)$$

La misura della distorsione è data dal gradiente della posizione finale rispetto alla posizione iniziale

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_0} = \nabla_0 \mathbf{x}_1 \quad (11)$$

a condizione che la variazione di configurazione sia regolare; ne consegue:

$$\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{x}_0 + \nabla_0 \mathbf{u} = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}} \quad (12)$$

Si noti che, per come è definita la trasformazione \mathbf{F} , vale la relazione

$$\delta \mathbf{F} = \delta \bar{\mathbf{F}} \quad (13)$$

Una condizione perché la deformazione sia definita è che il determinante di \mathbf{F} non si annulli; siccome per deformazione nulla, ovvero per $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ il determinante è positivo (e unitario), si assume che per una deformazione regolare il determinante debba essere positivo.

Il gradiente dello spostamento è un tensore doppio, che può essere espresso come somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}^T) \\ &= \bar{\mathbf{F}}_s + \bar{\mathbf{F}}_r \end{aligned} \quad (14)$$

le quali, per piccole deformazioni, corrispondono alla deformazione e alla rotazione rigida di riferimento.

Si consideri ora la distanza tra due punti infinitamente vicini a due diverse configurazioni, tali che la loro distanza passi da $d\mathbf{x}_0$ a $d\mathbf{x}_1$; dato che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$, si può scrivere

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{x}_0 \quad (15)$$

perché

$$d\mathbf{x}_1 = d\mathbf{x}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}) d\mathbf{x}_0 \quad (16)$$

La norma della distanza diventa:

$$d\mathbf{x}_1^T d\mathbf{x}_1 = d\mathbf{x}_0^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}_0^T (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}) d\mathbf{x}_0 \quad (17)$$

La differenza della norma valutata nelle due diverse configurazioni dà la misura della deformazione che ci interessa:

$$d\mathbf{x}_1^T d\mathbf{x}_1 - d\mathbf{x}_0^T d\mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}_0^T (\bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}) d\mathbf{x}_0 = 2d\mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{x}_0 \quad (18)$$

ove $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il tensore di deformazione di *Green-Lagrange*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} ((\nabla_0 \mathbf{u})^T + \nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \mathbf{u}) \quad (19)$$

per piccole deformazioni, il termine quadratico si può trascurare, ottenendo così la consueta definizione delle deformazioni lineari.

2.1.2 Sforzi ed Equilibrio

Gli sforzi, come enunciato in precedenza, sono definiti come i tensori che soddisfano l'equilibrio rispetto alle forze di volume e, al contorno, rispetto alle forze di superficie. Al tendere a zero del volume di controllo, se le forze di volume sono regolari (ovvero non vi sono singolarità come ad esempio forze concentrate), l'equilibrio coinvolge solo sforzi sul contorno del volume. Ne risulta che il flusso degli sforzi attraverso la superficie di contorno deve essere nullo, ovvero deve valere la relazione

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (20)$$

secondo la quale gli sforzi $\boldsymbol{\sigma}_n$ sulla faccia in direzione \mathbf{n} sono dati dal prodotto di un tensore $\boldsymbol{\sigma}$ per la direzione \mathbf{n} .

L'equilibrio del volume di controllo è dato da

$$\int_V \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (21)$$

ma l'integrale di superficie può essere trasformato in integrale di volume attraverso il teorema di *Stokes*:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (22)$$

e quindi l'equilibrio, dal momento che deve valere in ogni punto, diventa:

$$\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (23)$$

Dal momento che l'equilibrio di un volume di struttura dipende dal flusso di sforzo attraverso il contorno, è fondamentale definire in modo opportuno il sistema di riferimento rispetto al quale vengono operate le differenziazioni.

I tensori di sforzo si distinguono in base alla normale e all'elementino di superficie che moltiplicano a dare le forze per unità di superficie in un determinato punto; vale la relazione

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}_i dS_i \quad (24)$$

ovvero il prodotto del tensore di sforzo per una normale e per un elemento infinitesimo di superficie formulati in modo consistente non dipende dalla configurazione in cui è stato formulato e quindi si conserva.

Quando la normale e l'elementino di area vengono calcolati nella *configurazione deformata* si hanno gli sforzi di *Cauchy*; in questo caso la relazione di equilibrio è scritta concettualmente nella forma

$$\mathbf{f} + \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (25)$$

ovvero la divergenza viene calcolata nella configurazione finale.

Quando invece si considera la *configurazione iniziale*, si ha il *tensore primo di Piola-Kirchhoff*:

$$\mathbf{f} + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I = 0 \quad (26)$$

Questo tensore ha una chiara interpretazione fisica e risulta comodo in quanto elimina la dipendenza dalla configurazione incognita di normale ed elemento di area.

Tuttavia tale tensore non è coniugato ad una misura di deformazione per noi significativa; conviene allora usare il *tensore secondo di Piola-Kirchhoff*, definito come

$$\mathbf{P}_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_I \quad (27)$$

Questo tensore è coniugato, dal punto di vista energetico, del tensore di deformazione di *Green-Lagrange*.

Ciò significa che data l'energia di deformazione per unità di volume del sistema (che ovviamente è indipendente dal sistema di riferimento o dalla definizione di deformazione e sforzo adottate), lo sforzo coniugato ad una deformazione si ottiene considerandone il gradiente rispetto ad una data deformazione (e viceversa):

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial W_d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (28)$$

2.1.3 Altre Misure di Sforzo e Deformazione

Come accennato in precedenza, esistono diverse formulazioni del problema della meccanica del continuo, e diverse misure di sforzo e deformazione. I requisiti fondamentali che tali misure devono soddisfare sono: (a) la capacità di descrivere correttamente uno spostamento ed una rotazione rigida, e (b) l'essere tra loro coniugati dal punto di vista energetico.

Il *tensore secondo di Piola-Kirchhoff* ed il *tensore di Green-Lagrange* soddisfano questa condizione. Anche i tensori di sforzo e di deformazione di *Cauchy* la soddisfano, a patto di riferirsi alla configurazione deformata anziché a quella iniziale, cosa che presenta alcuni svantaggi. Infatti, nel secondo caso, il dominio di integrazione e le coordinate rispetto alle quali si eseguono le derivazioni sono incogniti, quindi il problema fin dalla sua impostazione è implicito.

Esistono tuttavia casi in cui sia conveniente lavorare con le grandezze espresse nel riferimento *deformato*: sono i casi in cui la legge costitutiva del materiale non è conservativa, e quindi il tensore di sforzo dipende dalla storia della deformazione. In questo caso conviene utilizzare il *tensore di rateo di sforzo di Jaumann*. La sua definizione è molto semplice: si tratta della derivata temporale del tensore di Cauchy, riportata nel sistema di riferimento del materiale. Sia $\boldsymbol{\sigma}$ il tensore di sforzo di Cauchy, ovvero il tensore di sforzo ricavato considerando la normale e l'elementino di area in configurazione deformata. Il tensore di *Cauchy* viene *orientato* come il sistema iniziale attraverso la rotazione rigida descritta dalla parte antisimmetrica del gradiente di spostamento:

$$\mathbf{R} = \int_0^t \dot{\mathbf{F}}_r \, d\tau \quad (29)$$

con $\dot{\mathbf{F}}_r = \boldsymbol{\omega} \times$; quindi lo sforzo di *Cauchy* ruotato nel riferimento iniziale è:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} \quad (30)$$

La sua derivata temporale è:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega} \times^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (31)$$

Quando il tutto viene riportato in avanti nella configurazione deformata si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_J = \boldsymbol{\omega} \times^T \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \times \quad (32)$$

Questo tensore è coniugato con la velocità di deformazione,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_J = \dot{\mathbf{F}}_s \quad (33)$$

il cui integrale nel tempo è la deformazione di *Cauchy*.

2.2 Principio dei Lavori Virtuali

Si parta dall'equazione di equilibrio, considerando tra le forze di volume anche le forze d'inerzia e altre forze generiche comunque potenzialmente dipendenti dalla configurazione (ad esempio le forze di natura elettromagnetica):

$$-\rho \mathbf{a} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I = 0 \quad (34)$$

dove \mathbf{q} siano incognite che non esprimono la configurazione del sistema. Il lavoro virtuale per unità di volume è dato da

$$\delta \mathbf{u}^T (-\rho_0 \mathbf{a} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I) = 0 \quad (35)$$

Si noti che $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x}_1$ in quanto la configurazione iniziale non subisce variazioni virtuali dal momento che non è incognita. Si integri il lavoro sul volume della struttura in configurazione indeformata:

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T (-\rho_0 \mathbf{a} + \mathbf{f}_0(\mathbf{q}) + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I) dV = 0 \quad (36)$$

si noti come anche la densità ed in generale le forze per unità di volume dipendano dalla scelta del volume di riferimento per l'integrazione. L'ultimo termine, che esprime il lavoro della divergenza degli sforzi, secondo la regola di derivazione del prodotto di funzioni si può esprimere come:

$$\delta \mathbf{u}^T \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I = \nabla_0 \cdot (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_I) - \delta \nabla_0 \mathbf{u} : \mathbf{P}_I \quad (37)$$

dove l'operatore $\mathbf{a} : \mathbf{b}$ esegue il prodotto interno coefficiente per coefficiente dei tensori doppi \mathbf{a} e \mathbf{b} . Mentre l'integrale sul volume del primo termine a secondo membro si trasforma in un integrale di superficie dell'argomento della divergenza, nel secondo termine a secondo membro si riconosce la perturbazione virtuale dello Jacobiano della trasformazione di configurazione; si consideri ora la relazione:

$$\begin{aligned} \delta \nabla_0 \mathbf{u} : \mathbf{P}_I &= \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}_I \\ &= \delta \mathbf{F} : \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_I \\ &= \delta \mathbf{F} : \mathbf{F} \mathbf{P}_{II} \\ &= \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}_{II} \\ &= \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) : \mathbf{P}_{II} \end{aligned} \quad (38)$$

dove, per definizione, $\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$, la matrice identità. L'unico passaggio non banale è il penultimo, che sfrutta una proprietà del prodotto interno tra tensori per la quale $\mathbf{a} : \mathbf{bc} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} : \mathbf{c}$. Si noti infine che l'ultima operazione, ovvero considerare

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}_{II} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) : \mathbf{P}_{II} \quad (39)$$

è lecita in quanto il tensore secondo di *Piola-Kirchhoff* è simmetrico. Si ottiene quindi

$$\delta \nabla_0 \mathbf{u} : \mathbf{P}_I = \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{P}_{II} \quad (40)$$

Il risultato saliente è che il lavoro virtuale del sistema può essere scritto come:

$$\int_{V_0} (\delta \mathbf{u}^T (-\rho_0 \mathbf{a} + \mathbf{f}_0(\mathbf{q})) - \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{P}_{II}) dV + \int_{\partial V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0 \quad (41)$$

dove si è usato $\mathbf{p} = \mathbf{P}_I \mathbf{n}_0$ per indicare la forza per unità di superficie imposta al contorno, mentre la configurazione imposta al contorno è implicitamente considerata nel $\delta \mathbf{u}$, la cui perturbazione virtuale è diversa da zero solo sulla parte libera.

2.2.1 Rigidezza di Presforzo e Geometrica

A partire dal lavoro interno per unità di volume si possono ricavare interessanti informazioni sui contributi all'equilibrio forniti dalla deformabilità della struttura e legati alla nonlinearietà del problema.

Ciò non significa che questi contributi debbano essere isolati e descritti a parte: una formulazione multicorpo o in generale non-lineare completa e consistente ne tiene conto implicitamente; tuttavia il loro studio consente di metterne in luce la natura matematica ed il principio fisico che il modello matematico descrive.

Si consideri il lavoro interno

$$\delta W_d = \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{P}_{II} \quad (42)$$

in cui compare la perturbazione virtuale della deformazione di *Green-Lagrange*, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, data dalla relazione

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left((\nabla_0 \delta \mathbf{u})^T + \nabla_0 \delta \mathbf{u} + 2 (\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \delta \mathbf{u} \right) \quad (43)$$

Come si vede il termine quadratico nel gradiente di \mathbf{u} si è trasformato in un termine misto che, al di là del gradiente, dipende linearmente da \mathbf{u} . La linearizzazione del lavoro comporta la perturbazione dei termini di deformazione e di sforzo in funzione della configurazione \mathbf{u} :

$$\delta \delta W_d = \left(\mathbf{P}_{II} : \frac{\partial \delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} \quad (44)$$

Si noti, per inciso, che $\partial \mathbf{P}_{II} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ è la linearizzazione del legame costitutivo, che esprime la relazione tra la perturbazione di deformazione e la perturbazione di sforzo. Il primo termine a secondo membro è il già citato termine di *rigidezza di presforzo*. Esso esprime una forza dipendente dalla configurazione attraverso le sollecitazioni presenti nella struttura; un tipico esempio è dato dalla rigidezza trasversale di un filo, che è direttamente proporzionale alla pretensione applicata al filo stesso. Nel secondo termine a secondo membro, che con un certo abuso di notazione possiamo indicare con

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \left(\nabla_0^T + \nabla_0 + 2 (\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \right) \quad (45)$$

la parte lineare, $(\nabla_0^T + \nabla_0) / 2$, determina la consueta *rigidezza lineare*, mentre la parte quadratica determina la cosiddetta *rigidezza geometrica*.

Questi contributi sono implicitamente considerati quando si usa la formulazione non-lineare completa; la loro interpretazione è importante quando se ne vogliono considerare gli effetti in termini di correzione di una formulazione lineare o comunque semplificata.

2.2.2 Termini Inerziali

Si consideri ora il termine di lavoro esterno, ed in particolare le forze d'inerzia. Come visto in precedenza, se le incognite che descrivono la configurazione del sistema sono

espresse direttamente nel riferimento inerziale, l'espressione delle forze d'inerzia risulta notevolmente semplificata.

A volte, tuttavia, questo non è possibile o non è conveniente per altri motivi (un esempio significativo verrà illustrato in seguito nel caso del *riferimento convettivo*). Una tipica applicazione è rappresentata dalla descrizione della dinamica di una pala di elicottero. A questo punto l'espressione delle forze di inerzia in un sistema solidale con l'albero del rotore diventa piuttosto complessa.

In precedenza era stata scritta l'espressione dell'accelerazione di un corpo la cui posizione era descritta dalla sovrapposizione di un moto relativo ed uno di trascinamento; sostituendo l'espressione dell'accelerazione nella forza d'inerzia per unità di volume si ottiene:

$$\mathbf{f}_{in} = -\rho (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}) \quad (46)$$

Lo spostamento virtuale corrispondente è:

$$\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_\delta \times \mathbf{x} + \mathbf{R}\delta \tilde{\mathbf{x}} \quad (47)$$

dove $\boldsymbol{\theta}_\delta \times = \delta \mathbf{R}\mathbf{R}^T$. Il lavoro per unità di volume è:

$$\delta W_{in} = \boldsymbol{\theta}_\delta^T \mathbf{x} \times \mathbf{f}_{in} + \delta \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{f}_{in} \quad (48)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \delta W_{in} = & - \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}_\delta \\ \delta \tilde{\mathbf{x}} \end{array} \right\}^T \rho \left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{x} \times^T \mathbf{x} \times & -\mathbf{x} \times^T \mathbf{R} \\ -\mathbf{R}^T \mathbf{x} \times & \mathbf{I} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{array} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{x} \times^T \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \times^T \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + 2\mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{array} \right\} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

di cui è agevole separare la vera e propria matrice di massa generalizzata, il primo contributo a secondo membro:

$$\rho \left[\begin{array}{cc} \mathbf{x} \times^T \mathbf{x} \times & -\mathbf{x} \times^T \mathbf{R} \\ -\mathbf{R}^T \mathbf{x} \times & \mathbf{I} \end{array} \right] = \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{R}) \quad (50)$$

dai termini di trascinamento in $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times$, la cui linearizzazione dà la cosiddetta *rigidezza centrifuga*, e di *Coriolis* in $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$, che danno la tipica formulazione del problema dinamico non vincolato

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (51)$$

Queste considerazioni possono essere facilmente estese al caso generale (vedi successiva trattazione del *superelemento*); ciò che preme sottolineare è che dalla linearizzazione del problema si nota che le forze di inerzia “di riferimento” danno un contributo di rigidezza (ovvero di forza dipendente dalla configurazione) e di ritardo (ovvero di forza dipendente dalla velocità, è improprio parlare di smorzamento a proposito di termini conservativi) che si aggiungono ai termini correttivi puramente deformativi visti in precedenza.

Quanto detto non vuole assolutamente esaurire l'argomento della meccanica dei continui deformabili; in particolare non sono stati minimamente affrontati problemi importanti quali gli aspetti numerici legati alla discretizzazione del problema, aspetti significativi legati alla modellazione costitutiva dei materiali, ecc., per i quali si rimanda ad esempio a [5, 4]

3 Modello di Trave

La trave è un modello molto importante dal punto di vista applicativo perché consente di operare una astrazione molto efficiente di un componente strutturale di grande interesse.

La sua funzione strutturale consiste principalmente nel trasmettere le sollecitazioni dal punto in cui vengono applicate al punto in cui si scaricano, sotto forma di azioni interne, tipicamente taglio e momento flettente.

Dal punto di vista fenomenologico una trave è costituita da un continuo con una dimensione preponderante sulle altre due, le cui caratteristiche geometriche e strutturali variano con regolarità lungo la direzione preponderante. Ciò significa ad esempio che non sono ammesse brusche variazioni di sezione, o curve brusche (in tali casi, dal punto di vista operativo conviene definire più travi e stabilire un criterio di congruenza che le connetta). Questa definizione, volutamente vaga, può essere ristretta applicando assunzioni via via più rigide per semplificare la formulazione.

Il modello di trave ha visto fin dall'inizio un forte interesse nell'ambito della modellazione multicorpo perché ad una relativa semplicità di modellazione, se confrontata ad esempio con piastre e solidi, unisce una grande sinteticità, ovvero la capacità di descrivere con buona approssimazione e con un ridotto numero di gradi di libertà componenti strutturali relativamente più complessi purché, sia pure a prezzo di semplificazioni, riconducibili ad una forma allungata.

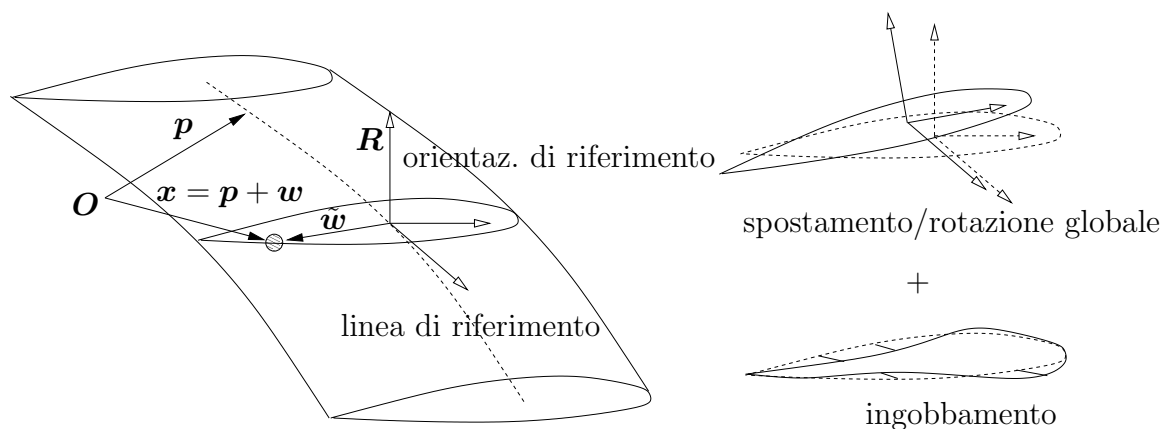


Figura 1: Cinematica della trave: decomposizione lungo l'asse e nella sezione.

3.1 Cinematica e Deformazioni

Dal punto di vista cinematico la trave è descritta da una linea di riferimento, che chiameremo \mathbf{p} , di cui è richiesta la continuità, su cui è adagiata una orientazione, che chiameremo \mathbf{R} . Il generico punto della trave è definito dalla posizione \mathbf{p} della sezione di riferimento su cui il punto si trova, e dalla posizione \mathbf{w} del punto all'interno della sezione di riferimento:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{w} \tag{52}$$

con

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\xi) \quad (53a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}(\xi) \tilde{\mathbf{w}}(\eta, \zeta) \quad (53b)$$

L'ingobbamento \mathbf{w} a rigore potrebbe anche dipendere dall'ascissa curvilinea ξ . In tal caso, la trave è ancora formulata come un continuo tridimensionale a seguito di una riparametrizzazione. Nel seguito, tale dipendenza viene tralasciata, riducendola così ad un continuo monodimensionale.

La derivata della posizione rispetto ad una ascissa curvilinea ξ permette di ricavare informazioni su come la trave si attegga lungo il suo sviluppo:

$$\mathbf{x}_{/\xi} = \mathbf{p}_{/\xi} + \mathbf{R}_{/\xi} \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{l} + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{w} \quad (54)$$

La derivata della linea di riferimento, $\mathbf{l} = \mathbf{p}_{/\xi}$, descrive come la linea si attegga nello spazio; la derivata dell'orientazione, $\boldsymbol{\rho} \times = \mathbf{R}_{/\xi} \mathbf{R}^T$, descrive la curvatura della sezione.

In analogia con il caso del continuo tridimensionale, la misura della deformazione è data dalla differenza tra la misura di lunghezza in due diverse configurazioni. Questo confronto richiede però che le misure vengano confrontate in un riferimento comune; per convenienza si scelga il riferimento del *materiale*, ovvero il riferimento solidale con la sezione nel quale viene espresso il legame costitutivo della trave. La distorsione nel punto generico, quindi, viene definita come

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{R}_1^T \mathbf{x}_{1/\xi} - \mathbf{R}_0^T \mathbf{x}_{0/\xi} = (\mathbf{R}_1^T \mathbf{l}_1 - \mathbf{R}_0^T \mathbf{l}_0) + (\mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0^T \boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{R}_0) \tilde{\mathbf{w}} \quad (55)$$

Questo consente di identificare come misure della deformazione di una trave le grandezze

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{R}_1^T \mathbf{l}_1 - \mathbf{R}_0^T \mathbf{l}_0 \quad (56a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{R}_0^T \boldsymbol{\rho}_0 \quad (56b)$$

che esprimono la deformazione lineare e rotazionale della trave, e sono coniugate delle azioni interne.

La loro variazione virtuale consente di mettere in luce importanti proprietà della deformazione:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\boldsymbol{\nu}} &= \delta \mathbf{R}_1^T \mathbf{l}_1 + \mathbf{R}_1^T \delta \mathbf{l}_1 \\ &= \mathbf{R}_1^T (\mathbf{l}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_\delta + \delta \mathbf{l}_1) \end{aligned} \quad (57a)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\boldsymbol{\kappa}} &= \delta \mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{R}_1^T \delta \boldsymbol{\rho}_1 \\ &= \mathbf{R}_1^T (\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_\delta + \delta \boldsymbol{\rho}_1) \end{aligned} \quad (57b)$$

Questa operazione si chiama *derivata corotazionale*, ovvero esprime il concetto di derivata a seguito di una riorientazione, che richiede anche la derivazione della riorientazione stessa.

Mentre il termine $\delta \mathbf{l}_1$ può essere agevolmente trasformato in una opportuna perturbazione virtuale delle incognite del problema:

$$\delta \mathbf{l}_1 = \delta (\mathbf{p}_{1/\xi}) = (\delta \mathbf{p}_1)_{/\xi} \quad (58)$$

il termine $\delta \boldsymbol{\rho}_1$ richiede maggiore cura. Infatti, la sequenza delle operazioni di perturbazione virtuale e di derivazione nel caso dei parametri di rotazione non è invertibile, ovvero non vale il teorema di *Schwartz*, se non per la matrice di rotazione. Si ha quindi:

$$\delta (\mathbf{R}/\xi) = (\delta \mathbf{R})/\xi \quad (59)$$

ovvero

$$\boldsymbol{\varphi}_{\delta/\xi} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\varphi}_\delta \times \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R} = \delta \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\varphi}_\delta \times \mathbf{R} \quad (60)$$

da cui si ricava

$$\delta \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\varphi}_{\delta/\xi} - \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\varphi}_\delta \quad (61)$$

Questo consente di semplificare ulteriormente la perturbazione virtuale della deformazione di rotazione:

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\varphi}_{\delta 1/\xi} \quad (62)$$

quindi, omettendo il pedice 1 per semplicità:

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{R}^T (\mathbf{l} \times \boldsymbol{\varphi}_\delta + \delta \mathbf{l}) \quad (63a)$$

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\varphi}_{\delta/\xi} \quad (63b)$$

3.2 Principio dei Lavori Virtuali

Le azioni interne esprimono l'equilibrio di un concio infinitesimo di trave. Siano $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{m}}$ le forze ed i momenti agenti su una faccia nel sistema del materiale; le corrispondenti azioni interne nel sistema inerziale sono

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{t}} \quad (64a)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{m}} \quad (64b)$$

Il lavoro di deformazione è:

$$\begin{aligned} \delta W_d &= \int_L (\delta \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\mathbf{t}} + \delta \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \tilde{\mathbf{m}}) \, d\xi \\ &= \int_L (\boldsymbol{\varphi}_{\delta/\xi}^T \mathbf{m} + (\delta \mathbf{p}_{/\xi}^T + \boldsymbol{\varphi}_\delta^T \mathbf{l} \times^T) \mathbf{t}) \, d\xi \end{aligned} \quad (65)$$

Per integrazione per parti si può spostare la derivazione in ξ dalle perturbazioni virtuali alle azioni interne:

$$\delta W_d = \boldsymbol{\varphi}_\delta^T \mathbf{m} |_{\partial L} + \delta \mathbf{p}^T \mathbf{t} |_{\partial L} - \int_L (\delta \mathbf{p}^T \mathbf{t}_{/\xi} + \boldsymbol{\varphi}_\delta^T (\mathbf{m}_{/\xi} + \mathbf{l} \times \mathbf{t})) \, d\xi \quad (66)$$

Le equazioni di equilibrio diventano quindi

$$\mathbf{t}_{/\xi} = \boldsymbol{\tau} \quad (67a)$$

$$\mathbf{m}_{/\xi} + \mathbf{l} \times \mathbf{t} = \boldsymbol{\mu}, \quad (67b)$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\mu}$ sono rispettivamente le forze e i momenti per unità di lunghezza distribuiti sulla trave.

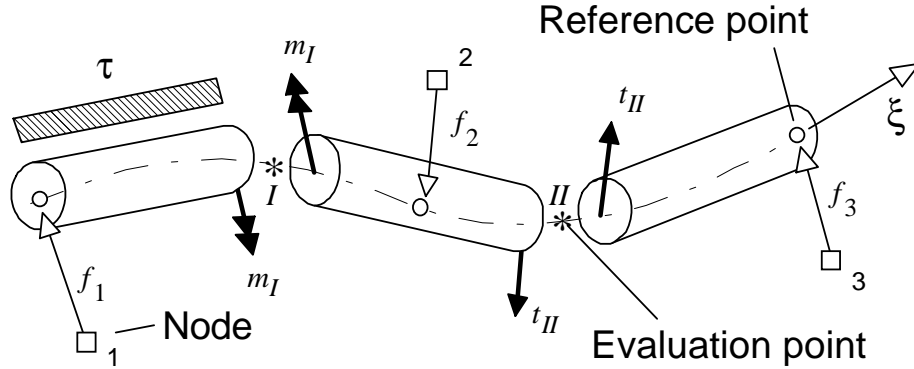


Figura 2: Trave a Volumi Finiti

3.3 Discretizzazione

La soluzione del problema passa attraverso una discretizzazione delle incognite di configurazione (\mathbf{p} e \mathbf{R} e le deformazioni da esse derivate) e la scrittura di una qualche forma di equilibrio. Tipicamente si ricorre al metodo degli elementi finiti, ma soluzioni alternative sono possibili e a volte risultano convenienti.

Una soluzione interessante è data dall'approccio cosiddetto a *Volumi Finiti* [6], in cui vengono discretizzate direttamente le equazioni di equilibrio, spezzando la trave in porzioni finite e scrivendo l'equilibrio ai nodi in termini di forze applicate e azioni interne ai punti di suddivisione. La Figura 2 illustra il concetto. Queste, a loro volta, dipendono dai gradi di libertà nodali attraverso una matrice costitutiva e una matrice di influenza, che può essere ricavata per interpolazione mediante funzioni di forma.

La formulazione si ricava, dal punto di vista matematico, applicando il metodo dei residui pesati, con funzioni peso costanti a tratti (funzioni di *Heavyside*). Mediante integrazione per parti delle Eq. (67) su un sottodominio $[\xi_a, \xi_b]$ di un dominio adimensionale $\xi \in [-1, 1]$ comprendente un nodo n , si ottiene

$$\mathbf{t}_b - \mathbf{t}_a = \int_a^b \boldsymbol{\tau} \frac{d\mathbf{p}}{d\xi} d\xi \quad (68a)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}_b + (\mathbf{p}(\xi_b) - \mathbf{p}(\xi_n)) \times \mathbf{t}_b \\ & - \mathbf{m}_a - (\mathbf{p}(\xi_a) - \mathbf{p}(\xi_n)) \times \mathbf{t}_a = \int_a^b (\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{p}(\xi) - \mathbf{p}(\xi_n)) \times \boldsymbol{\tau}) \frac{d\mathbf{p}}{d\xi} d\xi \end{aligned} \quad (68b)$$

con

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} = \sqrt{\frac{d\mathbf{p}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{p}}{d\xi}} \quad (69)$$

Uno dei vantaggi di questa formulazione è che non richiede alcuna valutazione numerica di integrali, ma soltanto la valutazione delle azioni interne in alcuni punti.

3.4 Modello di Piastra

Un altro modello strutturale importante per applicazioni multicorpo è la piastra. Una parte della trattazione è analoga a quella della trave, ma più complicata. Vi sono alcune

questioni ancora dibattute sulla modalità più opportuna di modellazione delle piastre. Senza addentrarci nei particolari, basti considerare che mentre alcuni autori prediligono un approccio analogo a quello illustrato per la trave, in cui la piastra viene definita come un continuo con struttura (ovvero l'orientazione della sezione è un grado di libertà e concorre alla determinazione della configurazione della piastra; allo stesso tempo vengono scritte le equazioni di equilibrio dei momenti), altri preferiscono far degenerare un elemento solido (brick) in una dimensione, descrivendo così la rotazione come differenza tra due spostamenti. Questo secondo approccio, se pure criticabile sotto molti aspetti, è meno sensibile ad alcuni inconvenienti numerici tipici dell'altro, primo fra tutti il problema del locking se la piastra è “spessa”.

4 Elemento Modale e Riferimento Convettivo

Come detto in precedenza, spesso nei problemi multicorpo la deformazione di una parte, pur significativa in assoluto e soprattutto ai fini della descrizione della dinamica del sistema, è piccola rispetto agli spostamenti ed alle rotazioni rigide a cui è sottoposta la parte nel suo insieme; si pensi alla biella di un motore a scoppio o ad un velivolo durante una manovra. In questo caso può essere conveniente separare la parte rigida del movimento da quella deformabile, da interpretare come una correzione apportata alla prima e dovuta alla flessibilità del corpo. In questo caso si parla di *Riferimento Convettivo*.

Il moto rigido viene associato al moto di un determinato punto del corpo (in termini di posizione e orientazione) a cui viene riferita la deformazione del resto. Si noti che in generale questo punto non deve necessariamente avere caratteristiche peculiari (ad es. non occorre che sia il baricentro del corpo) né deve appartenere al corpo stesso. È opportuno che il punto venga scelto in modo da consentire una formulazione più vantaggiosa pur conservando la massima generalità possibile.

Il moto degli altri punti viene definito in forma di moto relativo rispetto al sistema di riferimento solidale con il punto a cui viene attribuito il moto rigido. Spesso in questo caso ci si accorge che un modello di flessibilità lineare negli spostamenti è più che sufficiente per applicazioni di dinamica, e si ha il cosiddetto *flexible body* o *modal body*, ovvero un superelemento per il quale si opera a priori una condensazione modale, aumentata da forme statiche, dei gradi di libertà.

4.1 Cinematica e Deformazioni

La posizione di un punto generico è:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_O + \mathbf{f} \tag{70}$$

in cui la posizione relativa \mathbf{f} rispetto al riferimento \mathbf{x}_O , che dipende in generale da coordinate generalizzate \mathbf{q} , è:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_O \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) \tag{71}$$

dove \mathbf{R}_O definisce l'orientazione del sistema di riferimento in cui sono espresse le posizioni relative. In alcuni casi può essere necessario definire anche una orientazione relativa, tale per cui l'orientazione del punto generico è data da

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O \tilde{\mathbf{H}}(q) \quad (72)$$

Si noti che implicitamente si è scelto di rappresentare la configurazione relativa come una sequenza di posizione ed orientazione in analogia con quanto fatto per il corpo di riferimento. Ovviamente anche la sequenza opposta è consentita, ovvero orientazione e posizione, in virtù del teorema di decomposizione polare. La velocità è

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\mathbf{x}}_O + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{f} + \mathbf{R}_O \dot{\tilde{\mathbf{f}}} \end{aligned} \quad (73)$$

in cui compare la velocità angolare di riferimento

$$\boldsymbol{\omega}_O \times = \dot{\mathbf{R}}_O \mathbf{R}_O^T \quad (74)$$

a trascinare la posizione relativa \mathbf{f} . La posizione relativa, a sua volta, può dipendere dal tempo in quanto soggetta a deformazione. Lo stesso dicasi per la velocità di orientazione relativa:

$$\boldsymbol{\omega} \times = \boldsymbol{\omega}_O \times + \mathbf{R}_O \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{R}_O^T \quad (75)$$

ovvero

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_O + \mathbf{R}_O \tilde{\boldsymbol{\phi}} \quad (76)$$

se si definisce $\tilde{\boldsymbol{\phi}} \times = \dot{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{H}}^T$. L'accelerazione del punto è

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{x}} \\ &= \ddot{\mathbf{x}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}}_O \times \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega}_O \times \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{f} + 2\boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{R}_O \dot{\tilde{\mathbf{f}}} + \mathbf{R}_O \ddot{\tilde{\mathbf{f}}} \end{aligned} \quad (77)$$

mentre l'accelerazione angolare è

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_O + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{R}_O \tilde{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{R}_O \dot{\tilde{\boldsymbol{\phi}}} \quad (78)$$

4.1.1 Linearizzazione a Priori

Quando si considera un elemento modale, la linearizzazione della deformazione viene eseguita a priori; questo significa che lo spostamento e l'orientazione relativa sono espressi fin dall'origine in forma di combinazione lineare di contributi. Fatta salva la liceità di questa approssimazione, le sue ripercussioni sulla formulazione sono minime per quanto riguarda la posizione relativa, che assume la forma

$$\tilde{\mathbf{f}}(q) = \tilde{\mathbf{f}}_0 + \tilde{\mathbf{f}}_1 q \quad (79)$$

mentre sono più importanti per quanto riguarda l'orientazione, che diventa

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \cong \mathbf{I} + (\tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{q}) \times \quad (80)$$

Questa non è più una matrice di rotazione, ma una rotazione linearizzata, che, tra le altre, perde la proprietà di ortogonalità; infatti

$$\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{H}}^T = \left(\mathbf{I} + (\tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{q}) \times \right) \left(\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{q}) \times \right) = \mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{q}) \times (\tilde{\mathbf{h}}_1 \mathbf{q}) \times \quad (81)$$

Ne consegue che certe definizioni e certi invarianti sono tali solo al primo ordine.

4.2 Principio dei Lavori Virtuali

Il principio dei lavori virtuali contiene il lavoro di deformazione che non dipende, come è ovvio, dal moto convettivo a cui il corpo è sottoposto; quindi

$$\delta W_d = \delta W_d(\mathbf{q}) \quad (82)$$

Invece il lavoro delle forze di inerzia dipende in modo sostanziale dal moto di trascinamento:

$$\delta W_{in} = - \int_V \rho \delta \mathbf{x}^T \mathbf{a} \, dV \quad (83)$$

Senza entrare nei dettagli della formulazione, il lavoro delle forze di inerzia determina la nascita di una serie di contributi che dipendono dalle derivate seconde delle incognite di trascinamento e di deformazione, più un insieme di termini misti che dipendono dalla configurazione e dalla velocità di configurazione in analogia con il caso del singolo punto descritto da coordinate relative. È importante ricordare che anche le matrici che moltiplicano le derivate seconde delle incognite possono dipendere (ed in genere dipendono) dalla configurazione e quindi partecipano alla linearizzazione del problema.

4.2.1 Linearizzazione a Priori

Nel caso del superelemento modale, una importante eccezione è rappresentata dalle matrici che moltiplicano i gradi di libertà di deformazione, le quali sono invarianti e

rappresentano la massa e la rigidità modale del superelemento. Si definiscano:

$$\mathcal{I}_1 = \int_V \rho \, dV \quad (84a)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_0 \, dV \quad (84b)$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_1 \, dV \quad (84c)$$

$$\mathcal{I}_4 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_0 \times \tilde{\mathbf{f}}_1 \, dV \quad (84d)$$

$$\mathcal{I}_5 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_1 \times \tilde{\mathbf{f}}_1 \, dV \quad (84e)$$

$$\mathcal{I}_6 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_1^T \tilde{\mathbf{f}}_1 \, dV \quad (84f)$$

$$\mathcal{I}_7 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_0 \times \tilde{\mathbf{f}}_0 \times \, dV \quad (84g)$$

$$\mathcal{I}_8 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_0 \times \tilde{\mathbf{f}}_1 \times + \rho \tilde{\mathbf{f}}_1 \times \tilde{\mathbf{f}}_0 \times \, dV \quad (84h)$$

$$\mathcal{I}_9 = \int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}_1 \times \tilde{\mathbf{f}}_1 \times \, dV \quad (84i)$$

Si noti che \mathcal{I}_1 è la massa totale del corpo, \mathcal{I}_2 è il momento statico di riferimento e \mathcal{I}_7 è il momento d'inerzia di riferimento; infine \mathcal{I}_6 è la massa modale. Si ottiene:

$$\delta W_{in} = -\delta \mathbf{w}^T (\mathbf{M}(\mathbf{w}) \ddot{\mathbf{w}} + \text{centrifuga} + \text{coriolis}) \quad (85)$$

$$\delta \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{x}_O \\ \boldsymbol{\varphi}_{O\delta} \\ \delta \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (86)$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_O \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_O \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 I & \mathbf{R}_O (\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \mathbf{q}) \times \mathbf{R}_O^T & \mathbf{R}_O \mathcal{I}_3 \\ & \mathbf{R}_O (\mathcal{I}_7 + \mathcal{I}_8 \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathcal{I}_9 \mathbf{q}) \mathbf{R}_O^T & \mathbf{R}_O (\mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5 \mathbf{q}) \\ \text{sym} & & \mathcal{I}_6 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Una volta calcolati gli invarianti \mathcal{I}_i la soluzione richiede solo l'aggiornamento della matrice di massa generalizzata. In base a considerazioni di opportunità si possono trascurare alcuni contributi (ad esempio i termini quadratici nelle deformazioni); alcuni invarianti, infine, possono essere nulli per una opportuna scelta dell'origine del riferimento locale. Spesso però non conviene sfruttare queste opportunità di semplificazione delle matrici perché l'onere computazionale non ne risente grandemente, mentre la generalità della scelta dell'origine può essere conveniente dal punto di vista dell'impostazione del problema.

Il lavoro di deformazione è semplicemente rappresentato da

$$\delta W_d = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (89)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidezza modale.

Qui con i termini *massa modale* e *rigidezza modale* si intendono la massa e la rigidezza generalizzate associate ai gradi di libertà \mathbf{q} ; esse sono diagonali e corrispondono ai modi propri della struttura se risultano da una analisi modale, altrimenti possono risultare dalla scelta di forme arbitrarie con la quale approssimare il comportamento della struttura (forme alla *Ritz* o forme statiche, magari con scarico inerziale e disaccoppiate dalla struttura). In generale queste forme sono importanti, e spesso risolutive quando si usa un modello modale, perché consentono una efficace descrizione della deformabilità del corpo con un numero decisamente ridotto di incognite in caso di vincoli o forze concentrate.

Infatti i modi propri descrivono bene la dinamica di un sistema deformabile nell'intorno della corrispondente frequenza propria quando il corpo è libero; quando il corpo è vincolato o forzato da sollecitazioni concentrate, la sua dinamica di massima è ancora bene descritta dalle forme modali, che però non riescono a descrivere la deformazione, soprattutto per quanto riguarda la parte statica, in prossimità dei vincoli o dei punti di applicazione del carico. Per questo una base di deformate aumentata da deformate statiche calcolate applicando carichi nei punti di effettiva applicazione o nei punti di introduzione di vincoli consente di migliorare notevolmente l'efficacia del metodo.

Per un approfondimento del problema, si possono trovare cenni agli aspetti significativi della scelta della base di deformate per una riduzione di modelli in due testi fondamentali di aeroelasticità: il testo classico di Bisplinghoff e Ashley [7] e il lavoro di Bielawa su dinamica e aeroelasticità dei rotori di elicottero [8]; il problema viene approfondito nelle dispense del corso di Aeroelasticità Applicata del Professor Mantegazza, reperibili presso il sito <http://www.aero.polimi.it/~mante>.

4.3 Interfaccia

L'interfaccia tra le entità "fisiche" di un modello multicorpo ed il superelemento rappresenta un aspetto delicato del problema.

4.3.1 Interfaccia Cinematica

Dal punto di vista cinematico, l'interfaccia può essere puntuale, ovvero un punto del superelemento viene messo in relazione cinematica con un punto del modello multicorpo. Ad esempio, si consideri la posizione di un nodo multicorpo \mathbf{X} che viene fatto coincidere con un punto $\mathbf{x}(\xi)$ del superelemento flessibile:

$$\mathbf{x}_O + \mathbf{R}_O \tilde{\mathbf{f}}(\xi, \mathbf{q}) - \mathbf{X} = 0 \quad (90)$$

Questa relazione si traduce in un vincolo algebrico del problema, che, nell'ipotesi di un superelemento modale, è una relazione tra i gradi di libertà del nodo multicorpo e la combinazione dei gradi di libertà modali e della configurazione di trascinamento del superelemento.

Un vincolo di questo tipo introduce nel superelemento una sollecitazione concentrata in un punto. Se questo è l'effetto desiderato, allora è opportuno migliorare la base di deformazioni con funzioni che consentano un maggiore dettaglio in prossimità del punto di vincolo.

Se invece l'effetto desiderato non è di vincolo in un punto ben preciso, ma di vincolo “mediato” su una zona di interazione (ad esempio un vincolo che modella un appoggio distribuito su una superficie) la relazione può essere di tipo integrale; formalmente si ha:

$$\mathbf{x}_O + \mathbf{R}_O \frac{\int_D \tilde{\mathbf{f}}(\xi, \mathbf{q}) dD}{\int_D dD} - \mathbf{X} = 0 \quad (91)$$

dove D rappresenta il dominio su cui la media viene calcolata; esso può essere una linea, una superficie od un volume, e rappresentare una porzione o la totalità del superelemento.

Si noti che, se la media viene estesa a tutto il corpo e pesata con la densità, essa equivale ad imporre una relazione con il baricentro del sistema in configurazione deformata:

$$\frac{\int_V \rho \tilde{\mathbf{f}}(\xi, \mathbf{q}) dV}{\mathcal{I}_1} = \tilde{\mathbf{f}}_{CG} \quad (92)$$

In entrambi i casi, in accordo con il metodo dei moltiplicatori di *Lagrange*, il contributo di reazione vincolare è dato dalla derivata parziale dell'equazione di vincolo rispetto alle coordinate libere per i moltiplicatori stessi.

4.3.2 Forze

Un diverso tipo di interfaccia è rappresentato dallo scambio di interazioni tra il superelemento e il mondo multicorpo in termini di forza. In questo caso la forza è definita nel sistema inerziale, mentre il superelemento ne riceve la componente generalizzata:

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} + \int_S \delta \mathbf{x}^T \mathbf{p} dS + \int_V \delta \mathbf{x}^T \boldsymbol{\phi} dV \quad (93)$$

dove \mathbf{p} è una forza per unità di superficie e $\boldsymbol{\phi}$ è una forza per unità di volume. Ne risulta un contributo di forza e momento risultanti agenti sui gradi di libertà di trascinamento, più un contributo di forze generalizzate che lavorano per le variazioni virtuali delle coordinate generalizzate.

4.3.3 Problemi Multicampo

In molti casi queste forze generalizzate possono dipendere più o meno direttamente dalla configurazione del sistema; ad esempio le condizioni al contorno per le forze aerodinamiche sono determinate dall'orientazione e dalla velocità della struttura; una struttura può essere attuata da sistemi idraulici o elettrici/elettromagnetici, il cui stato dipende da incognite idrauliche o elettromagnetiche. Questo dà luogo a una dipendenza implicita delle forze dallo stato del problema. Un esempio di applicazione multicampo, unito ad una interessante formulazione di trave, si trova in [9]. Un esempio di analisi integrata aeroservoelastica multicorpo è invece presente in [10].

5 Elementi Deformabili a Parametri Concentrati

L'analisi multicorpo viene spesso utilizzata per descrivere in modo sintetico la dinamica di meccanismi in cui la deformabilità rappresenta un aspetto fondamentale per quanto

riguarda il suo impatto sulla dinamica, e non di per sé. In questi casi, ciò che conta non è tanto la capacità di descrivere in modo dettagliato il campo di deformazioni e di sforzi in un continuo deformabile durante un transitorio, quanto la capacità di descrivere sinteticamente, ma senza perdere aspetti essenziali, le forze e i momenti scambiati tra due parti di un meccanismo attraverso un giunto deformabile quando quest'ultimo sia soggetto a deformazioni che, pur non compromettendone l'integrità strutturale, non siano più infinitesime.

Si consideri ad esempio il caso di una molla rotazionale, un componente deformabile che trasmette ai due nodi che collega, a e b , una coppia che è funzione della rotazione relativa tra i due nodi stessi,

$$\mathbf{R}_{\text{rel}} = \mathbf{R}_a^T \mathbf{R}_b. \quad (94)$$

Questa rotazione relativa può essere espressa mediante il *vettore rotazione*, detto anche *vettore di Eulero*,

$$\boldsymbol{\theta} = \text{ax} \left(\exp^{-1} (\mathbf{R}_{\text{rel}}) \right). \quad (95)$$

Il momento interno generato dal componente deformabile dipende dal vettore rotazione:

$$\bar{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\theta}). \quad (96)$$

Si noti che il vettore $\boldsymbol{\theta}$ rimane se stesso indipendentemente dal fatto che sia proiettato nel sistema di riferimento del nodo a o b . Per come è calcolato, è intrinsecamente definito nel sistema di riferimento del nodo a , \mathbf{R}_a ; tuttavia, una sua proiezione nel sistema di riferimento del nodo b comporta la trasformazione

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}|_b &= \mathbf{R}_b^T \mathbf{R}_a \boldsymbol{\theta}|_a \\ &= \mathbf{R}_{\text{rel}}^T \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (97)$$

Ma il vettore $\boldsymbol{\theta}$ non viene modificato dalla moltiplicazione per la matrice di rotazione che esso genera, \mathbf{R}_{rel} .

Si consideri quindi un vettore $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ definito come una “frazione” di $\boldsymbol{\theta}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \xi \boldsymbol{\theta}. \quad (98)$$

La corrispondente matrice di orientazione è

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) &= \exp(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi) \times) \\ &= \exp(\xi \boldsymbol{\theta} \times). \end{aligned} \quad (99)$$

Quindi la matrice di orientazione relativa tra i due nodi è

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{rel}} &= \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(1-\xi)) \\ &= \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}(1-\xi)) \\ &= \tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (100)$$

in quanto i vettori $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)$ sono tutti paralleli tra loro, perché paralleli, per costruzione, a $\boldsymbol{\theta}$, e quindi è lecito sommarli.

Il momento interno $\overline{\mathbf{m}}$ in generale non è parallelo a $\boldsymbol{\theta}$, a meno che la legge costitutiva del componente non sia isotropa:

$$\overline{\mathbf{m}}_{\text{isotropo}} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} m_l(|\boldsymbol{\theta}|). \quad (101)$$

Nel caso generico, l'orientazione a cui la legge costitutiva del momento $\overline{\mathbf{m}}$ viene riferita definisce la relazione costitutiva del componente dal punto di vista della connettività.

Il momento che il componente applica a ciascun nodo si ricava dal PLV:

$$\delta \mathcal{L}_{\text{def}} = \boldsymbol{\theta}_\delta \cdot \overline{\mathbf{m}}|_a, \quad (102)$$

con

$$\boldsymbol{\theta}_\delta = \mathbf{R}_a^T (\boldsymbol{\theta}_{b\delta} - \boldsymbol{\theta}_{a\delta}) \quad (103)$$

da cui si ricavano, avendo posto

$$\overline{\mathbf{m}}|_a = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) \overline{\mathbf{m}} \quad (104a)$$

$$\overline{\mathbf{m}}|_b = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(1-\xi))^T \overline{\mathbf{m}}, \quad (104b)$$

le coppie che agiscono sui due nodi, nel sistema di riferimento assoluto:

$$\mathbf{m}_a = -\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) \overline{\mathbf{m}} \quad (105a)$$

$$\mathbf{m}_b = \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) \overline{\mathbf{m}}, \quad (105b)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) &= \mathbf{R}_a \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\xi)) \\ &= \mathbf{R}_b \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(1-\xi))^T. \end{aligned} \quad (106)$$

Si possono notare alcuni casi significativi:

- $\xi = 0$ e $\xi = 1$: la legge costitutiva è riferita all'orientazione dei nodi a e b , rispettivamente. In tali casi si dice che la legge costitutiva è “attaccata”;
- $\xi = 1/2$: la legge costitutiva è riferita esattamente all'orientazione mediana tra quelle dei due nodi. In tale caso si dice che la legge costitutiva è “invariante”.

Quest'ultimo caso assume un notevole interesse pratico: una legge costitutiva invariante consente di invertire l'ordine di connessione dei nodi che il componente deformabile connette senza modificarne il comportamento. È immediato verificare come per qualunque

altro valore di ξ ciò non sia più vero. Il valore “ottimale” di ξ , quando esiste, dipende dall’effettiva conformazione del componente e da come il legame costitutivo sia stato effettivamente formulato o identificato da prove sperimentali.

Attraverso considerazioni formalmente analoghe, ma dai formalismi più complessi, si può scrivere la relazione costitutiva di un componente deformabile che esprima forze e momenti scambiati tra due nodi in funzione dello spostamento e della rotazione relative. Anche in quel caso, la scelta del sistema di riferimento al quale sono riferite le caratteristiche costitutive può determinare il comportamento del componente. Per ulteriori dettagli, si vedano [11, 12].

Note Bibliografiche

Per quanto riguarda la meccanica del continuo e gli elementi finiti, con particolare attenzione agli aspetti non-lineari due ottimi testi sono il Malvern [5] ed il Bathe [4].

Per quanto riguarda gli aspetti implementativi del multicorpo in generale e della flessibilità in particolare, oltre alla raccolta a cura di Schiehlen [1], della quale un pregio è la discussione critica dei principali codici conosciuti all’epoca (molti peraltro scomparsi), sono stati pubblicati di recente un certo numero di testi di ottima qualità, tra i quali vale la pena di segnalare lo Shabana [2] e il testo a cura di Geradin e Cardona [3].

Per quanto riguarda la formulazione delle travi, la bibliografia è veramente vasta. Vale la pena di ricordare che alcuni tra i precursori di questo approccio lavorano presso il Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale di questo Politecnico. Oltre ai lavori di Simo (ad esempio [13]) e di Hodges (ad esempio [14]) e Bauchau [15] occorre citare i lavori di Borri, Merlini, Ghiringhelli, Mantegazza e Giavotto (in ordine assolutamente sparso): [16, 17, 18, 19, 20].

Per quanto riguarda la parte di riferimento convettivo e di superelemento modale, si tratta di materiale relativamente standard, di cui si può trovare riferimento nei testi di analisi multicorpo citati in precedenza o ad esempio un breve cenno nella documentazione teorica di ADAMS/Flex.

In letteratura si può trovare infine materiale su due codici multicorpo, DYMORE [21] e MBDyn [22, 6, 23, 10], che modellano la flessibilità a travi e a superelemento flessibile (il secondo). Sono codici cosiddetti “accademici”, ovvero sviluppati per scopi di ricerca in ambito universitario. I sorgenti del secondo sono disponibili presso il sito <http://www.aero.polimi.it/~mbdyn>.

Riferimenti bibliografici

- [1] W. Schiehlen, *Multibody Systems Handbook*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [2] A. A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, second ed., 1998.
- [3] M. Geradin and A. Cardona, *Flexible Multibody Dynamics: a Finite Element Approach*. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.

- [4] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
- [5] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.
- [6] G. L. Ghiringhelli, P. Masarati, and P. Mantegazza, “A multi-body implementation of finite volume beams,” *AIAA Journal*, vol. 38, pp. 131–138, January 2000.
- [7] R. L. Bisplinghoff and H. Ashley, *Principles of Aeroelasticity*. New York: Wiley & sons, 1962.
- [8] R. L. Bielawa, *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Washington, DC: AIAA, 1992.
- [9] J. Mäkinen, A. Ellman, and R. Piché, “Dynamic simulations of flexible hydraulic-driven multibody systems using finite strain beam theory,” in *Fifth Scandinavian International Conference on Fluid Power*, (Linköping), 1997.
- [10] P. Masarati, G. L. Ghiringhelli, M. Lanz, and P. Mantegazza, “Integration of hydraulic components in a multibody framework for rotorcraft analysis,” in *26th European Rotorcraft Forum*, (The Hague, The Netherlands), pp. 57.1–10, 26–29 September 2000.
- [11] J. Merel, I. Wander, P. Masarati, and M. Morandini, “Analysis of load patterns in rubber components for vehicles,” in *ECCOMAS Multibody Dynamics 2007*, (Milano, Italy), June 25–28 2007.
- [12] P. Masarati and M. Morandini, “Intrinsic deformable joints.” to be published.
- [13] J. C. Simo, “A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part I,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 49, pp. 55–70, 1985.
- [14] D. H. Hodges, “A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams,” *Int. J. Solids Structures*, vol. 26, no. 11, pp. 1253–1273, 1990.
- [15] O. A. Bauchau and C. H. Hong, “Large displacement analysis of naturally curved and twisted composite beams,” *AIAA Journal*, vol. 25, pp. 1469–1475, November 1987.
- [16] M. Borri, “Contributo al calcolo di travi moderatamente curve e svergolte col metodo degli spostamenti,” Tech. Rep. N. 131, Istituto di Ingegneria Aerospaziale — Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1979. In Italian.
- [17] V. Giavotto, M. Borri, P. Mantegazza, G. L. Ghiringhelli, V. Caramaschi, G. C. Maffioli, and F. Mussi, “Anisotropic beam theory and applications,” *Computers & Structures*, vol. 16, no. 1–4, pp. 403–413, 1983.

- [18] M. Borri and T. Merlini, “A large displacement formulation for anisotropic beam analysis,” *Meccanica*, vol. 21, pp. 30–37, 1986.
- [19] M. Borri, G. L. Ghiringhelli, and T. Merlini, “Linear analysis of naturally curved and twisted anisotropic beams,” *Composites Engineering*, vol. 2, no. 5–7, pp. 433–456, 1992.
- [20] M. Borri and C. L. Bottasso, “An intrinsic beam model based on a helicoidal approximation — part I: Formulation,” *Intl. J. for Num. Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 2267–2289, 1994.
- [21] O. A. Bauchau and N. K. Kang, “A multibody formulation for helicopter structural dynamic analysis,” *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 38, pp. 3–14, April 1993.
- [22] G. L. Ghiringhelli, P. Masarati, P. Mantegazza, and M. W. Nixon, “Multi-body analysis of a tiltrotor configuration,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 19, pp. 333–357, August 1999.
- [23] G. Quaranta, P. Masarati, M. Lanz, G. L. Ghiringhelli, P. Mantegazza, and M. W. Nixon, “Dynamic stability of soft-in-plane tiltrotors by parallel multibody analysis,” in *26th European Rotorcraft Forum*, (The Hague, The Netherlands), pp. 60.1–9, 26–29 September 2000.